Flat tori in three dimensional space and convex integration

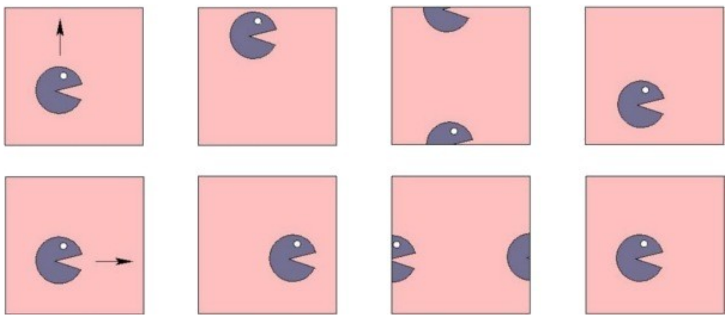
Vincent Borrelli (1), Saïd Jabrane (1), Francis Lazarus (2), and Boris Thibert (3)
(1)Institut Camille Jordan, Université Lyon I, Villeurbanne, (2) CNRS, GIPSA-Lab, Université de Grenoble, (3) Laboratoire Jean Kuntzmann, Université de Grenoble, France

Contacts chercheurs pour le suivi :
Vincent Borrelli, borrelli@math.univ-lyon1.fr, 04 72 44 79 38
Said Jabrane, jabrane@math.univ-lyon1.fr, 04 72 44 79 41
Francis Lazarus, Francis.Lazarus@gipsa-lab.grenoble-inp.fr, 04 76 82 64 67
Boris Thibert, Boris.Thibert@univ-grenoble-alpes.fr, 04 57 42 17 84

Un tore plat dans l'espace à trois dimensions !

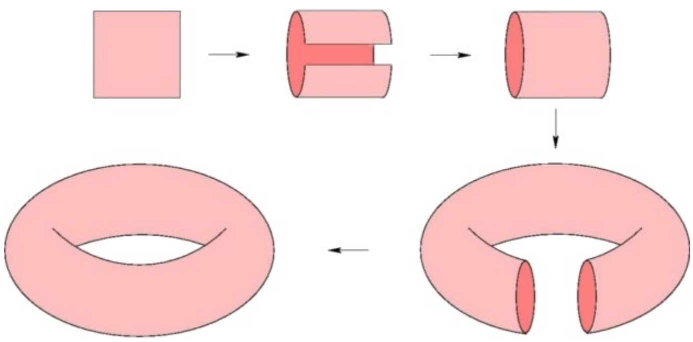
Les faits. Une équipe de quatre mathématiciens et informaticiens de l'Institut Camille Jordan (CNRS, Lyon I, INSA Lyon et Centrale Lyon), du GIPSA-lab (CNRS, Grenoble 1, Grenoble INP, Grenoble 3) et du Laboratoire Jean Kuntzmann (CNRS, Grenoble 1, Grenoble 2, Grenoble INP et INRIA) a obtenu les premières images d'un tore plat dans l'espace à trois dimensions. Ces images révèlent un objet insoupçonné, à mi-chemin entre les fractales et les surfaces ordinaires : une fractale lisse.

Qu'est-ce qu'un tore plat ? C'est un carré dont les côtés se correspondent deux à deux. Cela signifie que pour un être imaginaire vivant dans ce carré, chaque fois qu'il en sort par le côté supérieur il réapparaît immédiatement par le côté inférieur, de même pour les côtés droit et gauche.

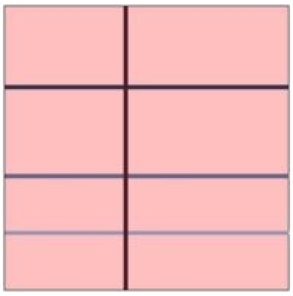


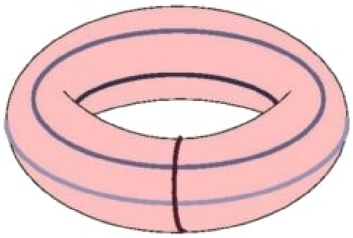
Ce monde carré est à l'image de certains jeux informatiques, les personnages qui disparaissent sur un côté de l'écran, resurgissent sur le côté opposé. En mathématique, ce monde porte le nom de *tore carré plat*, c'est un exemple de tore plat.

Que signifie visualiser un tore plat dans un espace à trois dimensions ? Pour avoir une idée concrète du monde carré, on commence par imaginer que celui-ci est constitué d'une matière que l'on peut déformer à loisir. On exploite ensuite cette flexibilité pour courber le carré dans la troisième dimension de façon à faire coïncider le bord supérieur avec le bord inférieur. On obtient ainsi un cylindre. Puis, on tord le cylindre obtenu jusqu'à ce que ses deux bordures soient en vis à vis et on réalise un raccordement. L'objet final a la forme d'une chambre à air de vélo : le monde carré, pour abstrait qu'il soit, n'est rien d'autre qu'une bouée !



Cette représentation du tore carré plat est certes éclairante mais elle souffre d'un défaut important : elle ne respecte pas les distances. De petites longueurs dans le monde carré peuvent devenir importantes sur la bouée.





Visualiser le tore carré plat, c'est trouver une représentation de ce tore qui respecte les distances.

En quoi est-ce important ? On a longtemps cru qu'il n'existait pas de façon de représenter le tore carré plat qui ne déforme pas les distances. Puis, dans les années cinquante, N. Kuiper et le prix Nobel J. Nash ont surpris tous les spécialistes en montrant que de telles représentations existaient bien et qu'elles possédaient des propriétés fascinantes et paradoxales. Visualiser un tore carré plat a donc permis tout à la fois de découvrir ces énigmatiques représentations, de mieux comprendre leur étrange structure et de mettre à jour une nouvelle classe d'objets à la géométrie insoupçonnée.

Au delà des questions de géométrie, la réalisation effective d'une représentation du tore carré plat a fourni la démonstration qu'une certaine famille d'équations mathématiques, sous-jacente au problème considéré, pouvait se résoudre avec l'outil informatique. Un fait qui était nullement évident *a priori*.

Pourquoi les travaux de Nash et Kuiper n'ont-ils pas permis, dès les années cinquante, de visualiser un tore carré plat ? Nash et Kuiper ont démontré *l'existence* de représentations ne déformant pas les longueurs du tore carré plat et cette existence est longtemps restée un défi à l'imagination des mathématiciens. Mais en mathématique démontrer l'existence d'un objet se distingue parfois fortement du fait de le *montrer*. L'allégorie du voleur explique bien cette distinction : Supposons réunis dans une pièce close un groupe d'individus assis autour d'un diamant posé au centre de la pièce. Imaginons maintenant que la lumière s'éteigne quelques instants et que le diamant ait disparu lorsqu'on la rallume. Nous avons alors la *démonstration* qu'un cleptomane se cache parmi les individus mais nous ne pouvons le *montrer* du doigt. Les preuves de Nash et de Kuiper sont certes bien plus qu'un piège « existentiel ». Néanmoins ces preuves ne fournissent pas de procédés suffisamment explicites et humainement abordables pour permettre de visualiser ou simplement d'imaginer les représentations du tore carré plat qui en résultent.

Quelles méthodes ont été suivies pour visualiser le tore carré plat ? Par rapport aux années cinquante, un homme va changer la donne, le prix Abel M. Gromov. Dans les années 70-80, ce mathématicien revisite les travaux de Nash et de Kuiper et en extrait une méthode qui généralise et éclaire leur démarche. Cette méthode, dite de *l'intégration convexe,* s'avère également d'une redoutable efficacité dans de nombreux autres problèmes de géométrie. Elle se forge rapidement une réputation d'abstraction, qui n'est probablement pas immérité, mais qui a pour inconvénient de cacher l'essentiel : l'intégration convexe ne se contente pas de montrer l'existence de solution, elle se prête à leur construction effective. Nous avons adapté la technique de l'intégration convexe au problème du tore carré plat en la transformant en un algorithme produisant des représentations du tore carré plat dans l'espace tridimensionnel. Son implémentation a permis de générer les premières images d'un tore carré plat. À notre connaissance c'est la première fois – avec ces images – que l'intégration convexe est mise en oeuvre de façon effective.

Qu'a-t-on découvert en analysant les premières images du tore carré plat ? Les travaux de Nash et Kuiper avaient plongé les mathématiciens dans la perplexité. Ils montraient en effet l'existence d'objets dont la régularité était problématique, voire paradoxale. Ils devaient être à la fois lisses et rugueux... L'analyse mathématique des images montre en effet une surface appartenant à deux mondes *a priori* antagonistes : celui des surfaces lisses, sans rugosité, et celui des fractales, infiniment brisées. Lorsque l'on réalise un agrandissement de la figure, on y observe invariablement des ondulations à des échelles de plus en plus petites. Chacune de ces ondulations –appelées *corrugations*-- prise isolément est lisse, mais leur accumulation crée un objet ressemblant à une fractale et ayant un aspect rugueux.

Quelles ont été les difficultés rencontrées ? En mathématique, l'essentiel de l'effort a porté sur la simplification de la méthode de l'intégration convexe ainsi que sur l'analyse de la structure géométrique de l'image du tore carré plat. Ces efforts ont permis de mettre à jour une classe d'objets dont la géométrie est intermédiaire entre les fractales et les surfaces lisses. En informatique, une difficulté majeure a été la taille des données. Les images du tore carré plat que nous avons obtenues ont nécessité l'utilisation d'un maillage de 2 milliards de sommets. Elles ont été réalisées avec le concours du mésocentre de calcul CIMENT à Grenoble.

Pourquoi une équipe pluridisciplinaire sur un projet mathématique ? La visualisation d'un tore carré plat est l'aboutissement d'un projet initié il y a six ans : le projet HEVEA. Il regroupe des chercheurs de trois disciplines différentes : mathématiques pures, mathématiques appliquées et informatique. Certes, la représentation d'un tore carré plat dans l'espace tridimensionnel est une problématique de mathématiques pures, mais le caractère algorithmique de la construction lui est de nature plus informatique et les problèmes numériques liés aux calculs sont du ressort des mathématiques appliquées. Sans les compétences et les points de vue de chacun, le projet aurait fait long feu.

Quelles sont les perspectives ouvertes par ces travaux ? La technique de l'intégration convexe s'applique bien au delà de la visualisation de tores plats, elle est utilisée de manière théorique dans la détermination de solutions atypiques d'équations aux dérivées partielles. En montrant que la méthode de l'intégration convexe peut être implémentée, ces résultats ouvrent des perspectives inédites en mathématiques appliquées, notamment pour la résolution d'équations différentielles telles qu'on peut les trouver en physique ou en biologie.

Plus spécifiquement, les images obtenues révèlent l'existence d'une classe d'objets dont la structure est intermédiaire entre les surfaces lisses et les fractales. De tels objets pourraient jouer un rôle central dans l'analyse de la géométrie des formes. Ils pourraient également résoudre certains paradoxes encore inexpliqués aujourd'hui.

Nos soutiens. Nos travaux n'auraient pas été possibles sans le soutien du CNRS et de la Région Rhône-Alpes.